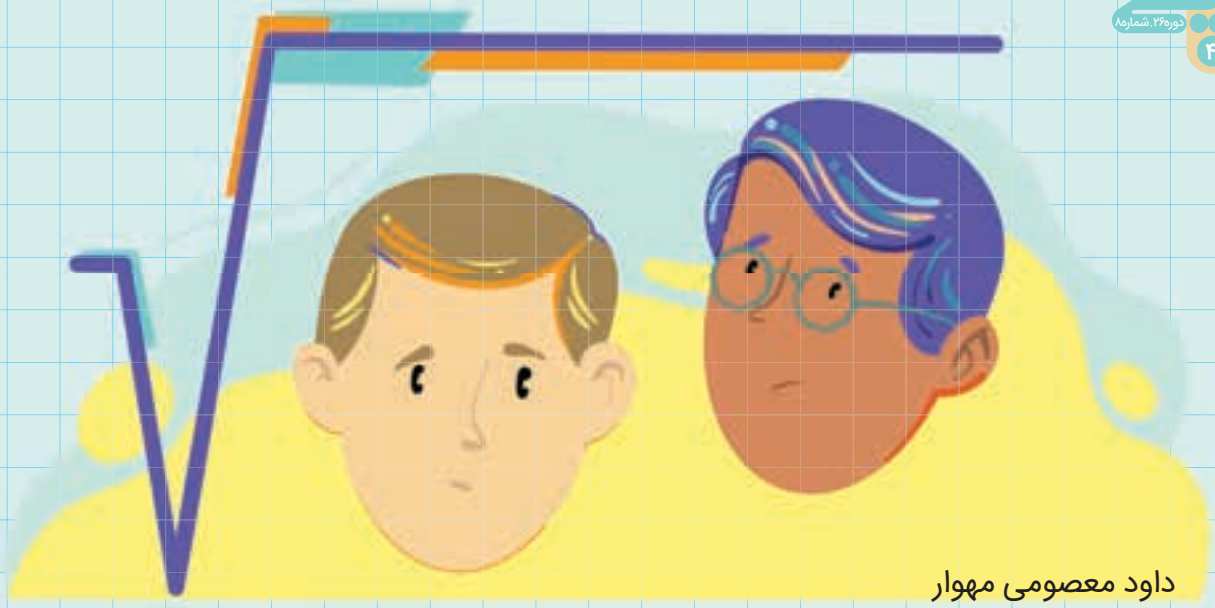

داود معصومی مهوار

داستان‌های ریاضی

فرض در لباس حکم!

من: خب در یکی از تمرین‌های هفتهٔ پیش قرار بود ثابت کنید: $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}<\sqrt{۱۵}$ که بیشتر شما استدلالی شبیه به هم نوشته بودید و به نظرم با بررسی این استدلال چیزهایی یاد خواهید گرفت. اما استدلال شما:

$$\sqrt{۶}+\sqrt{۲}<\sqrt{۱۵}\Rightarrow$$
$$(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲<\sqrt{۱۵}^۲\Rightarrow$$
$$\sqrt{۶}^۲+\sqrt{۲}^۲+۲\sqrt{۶}\times\sqrt{۲}<۱۵\Rightarrow$$
$$۶+۲+۲\sqrt{۶}\times\sqrt{۲}<۱۵\Rightarrow$$
$$۲\sqrt{۶}\times\sqrt{۲}<۷\Rightarrow$$
$$۲\sqrt{۶\times۲}<۴۹\Rightarrow$$
$$\sqrt{۴\times۶\times۲}<\sqrt{۴۹}\Rightarrow$$
$$\sqrt{۴۸}<\sqrt{۴۹}$$

الف

بهرام: به نظرم این استدلال مشکلی اساسی دارد. از همان اول با خود حکم شروع کرده است. یعنی خود حکم را درست فرض کرده است و از آن کمک گرفته است.

سعید: درست است که از حکم شروع کرده‌ایم، ولی همهٔ نتیجه‌گیری‌هایمان بر اساس چیزهایی است که خوانده‌ایم و درست هستند. در پایان نیز به یک جملهٔ درست، یعنی $\sqrt{۴۸}<\sqrt{۴۹}$ رسیده‌ایم. خود شما گفته بودید که «اگر تک‌تک نتیجه‌گیری‌ها را بپذیرید، باید همهٔ استدلال را بپذیرید.»

مرتضی: همهٔ حرف همین است. تک‌تک گزاره‌های الف پذیرفته نیستند. مشکل اصلی همان اولین گزاره است. در استدلال الف همان اول فرض شده است که: $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}<\sqrt{۱۵}$. اگر این را بدانیم، دیگر چه چیزی برای اثبات باقی مانده است؟

من با اشاره مرتضی را تأیید کردم و ۲۰ ثانیه تنها سکوت بود.

فرهاد: هنوز فکر می‌کنم استدلال الف درست است. در حقیقت، وقتی می‌گویند چیزی را اثبات کنید، می‌خواهند که درستی آن چیز را بررسی کنیم. خب اینجا هم همین کار را کرده‌ایم. بیخودی $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}<\sqrt{۱۵}$ را درست فرض نکرده‌ایم. می‌خواهیم درستی آن را بررسی کنیم.

همین‌جا من به سمت تخته رفتم و شروع به نوشتن کردم و از فرهاد خواستم که ادامه بدهد و به من کاری نداشته باشد.

فرهاد: می‌خواهیم درستی آن جمله را بررسی کنیم. ببینیم که اگر این گزاره درست باشد به کجا می‌رسیم؟ آیا آسمان به زمین می‌آید؟ یا به نتایج معقول و درست می‌رسیم؟ و همان‌طور که می‌بینید به نتیجهٔ معقولی رسیده‌ایم که حاکی از آن است که خود $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}<\sqrt{۱۵}$ نیز باید درست باشد.

نوشتهٔ من پای تخته

$$۲=۳\Rightarrow$$
$$۰\times۲=۰\times۳\Rightarrow$$
$$۰=۰$$

حرف فرهاد تمام شده بود و هیچ کس چیزی نمی‌گفت. همه به نوشتهٔ تخته خیره شده بودند.

سعید: ولی آقا مقایسهٔ حرف فرهاد با اینکه پای تخته نوشته‌اید، بی‌انصافی است. همه می‌دانیم برابری ۲ و ۳ نادرست است.

من: امیدوارم به فرهاد برنخورد ولی همهٔ گفته‌های او فقط بازی با کلمات بود. «در حقیقت»، «می‌خواهیم درستی آن را بررسی کنیم.»، «حاکی از آن است که» این‌ها همه بازی با کلمات هستند. به این مثال من توجه کنید. فرض کنید قرار است در دادگاهی اثبات کنند که آقای الف قاتل است و در همان آغاز وکیل مقتول با این جمله شروع کند که «از آنجا که آقای الف این قتل را مرتکب شده است، ...» آیا فکر می‌کنید به او اجازهٔ ادامه می‌دهند؟ اگر آقای الف قاتل است، این همه دنگ و فنگ و دادگاه و قاضی و وکیل برای چی است؟

خب بچه‌ها با اینکه ممکن است خیلی از شماها مثال دادگاه را پسندیده باشید و خیالتان را راحت کرده باشد، ولی این مثال من هم بازی با

کلمات است. کار ریاضیات دقیق‌تر از این است که با یک بریده از صفحهٔ حوادث راه بیفتد. باور کنید اصل ماجرا این است که در ریاضیات تصریح می‌کنند که:

«برای اثبات یک گزاره، باید آن را از گزاره‌های درست نتیجه بگیرید.»

بهرام: ولی در ریاضیات روشی به نام «برهان خلف» برای اثبات پذیرفته شده است که در آن چنین کاری نمی‌کنند!

من: هنوز در برنامهٔ درسی‌مان به برهان خلف نرسیده‌ایم، ولی در روش برهان خلف هم همین روند انجام می‌شود. هیچ وقت از خود حکم نباید شروع کنیم. فعلاً رهایش کنید تا بعداً به آن برسیم.

حالا سعید یک بار دیگر به نوشتهٔ تخته نگاه کن. من دو تا نتیجه‌گیری نوشته‌ام: اول اینکه دو طرف یک تساوی را ضرب در یک عدد یکسان، یعنی صفر کرده‌ام و در خط بعدی حاصل را محاسبه کرده‌ام. من هم چنان که فرهاد گفت خواسته‌ام تا درستی ۲=۳ را بررسی کنم. خب $a=b \Rightarrow c\times a=c\times b$ نادرست است یا $0\times a=0\times b \Rightarrow 0=0$ آیا من اشتباه نتیجه گرفته‌ام؟ و آیا واقعاً درستی $0=0$ چنان که فرهاد می‌گفت حاکی از آن است که ۲=۳ نیز درست است؟

فرهاد: شما از ۲=۳ شروع کرده‌اید که همه می‌دانیم نادرست است، ولی من چنین نکرده‌ام. و مهم‌تر اینکه چرا ضرب در صفر کردید؟

بهرام: فرهاد به این توجه کن که اگر بدانیم $\sqrt{6}+\sqrt{2}<\sqrt{15}$ نادرست نیست و درست است، دیگر چه احتیاجی به حرف‌های دیگر است؟

من: اینکه چرا ضرب در صفر کردم، اعتراض درستی نیست. دو طرف یک تساوی درست را در هر عددی می‌توان ضرب کرد و تساوی به دست آمده حتماً درست است. این مطلب اگر چه بسیار ساده به نظر می‌رسد، اما قابل اثبات است. از این اصل بدیهی نتیجه می‌شود که اگر a=b است، هر جا که بخواهیم حق داریم a را برداریم و به جای آن b بگذاریم. پس در تساوی بدیهی ac=ac به جای یکی از aها b را قرار می‌دهیم و به ac=bc می‌رسیم. بهرام هم کاملاً درست می‌گوید. بخش اول اعتراض فرهاد را به خوبی پاسخ داد.

به موضوع ظریف و دقیق دیگری نیز توجه کنید. من پای تخته نشان دادم که از یک گزارهٔ نادرست می‌توان با نتیجه‌گیری‌هایی کاملاً درست، به یک گزارهٔ درست رسید و به این ترتیب باطل‌بودن حکایت فرهاد را نشان دادم. فرهاد می‌گفت: «درستی $\sqrt{48}<\sqrt{49}$، حاکی از درستی $\sqrt{6}+\sqrt{2}<\sqrt{15}$ است.»

سعید: یعنی منظورتان این است که در یک نتیجه‌گیری کاملاً درست، از درستی نتیجه نمی‌توان به درستی گزارهٔ اولیه حکم کرد؟

من: بله. آنچه گفتی بیانی از یک بیان دقیق ریاضی است. شاید بعدها بیان دقیق‌تر آن را برایتان بگویم. فعلاً سراغ حل درست این مسئله برویم که بعضی نوشته بودند. ببینید:

$$\sqrt{48}<\sqrt{49} \Rightarrow$$
$$\sqrt{4\times 6\times 2}<\sqrt{49} \Rightarrow$$
$$2\sqrt{6\times 2}<\sqrt{49} \Rightarrow$$
$$2\sqrt{6}\times\sqrt{2}<7 \Rightarrow$$
$$6+2+2\sqrt{6}\times\sqrt{2}<15 \Rightarrow$$
$$\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{6}\times\sqrt{2}<15 \Rightarrow$$
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2<\sqrt{15}^2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{6}+\sqrt{2}<\sqrt{15}$$

ب

فرهاد: یعنی تمام دعوا سر این است که باید برعکس می‌نوشتیم؟

من: نه. تقریباً تمام دعوا سر این است که برعکس نوشته بودید!

مرتضی: خدا به داد برسد! گفتید «تقریباً». یعنی استدلال ب هنوز ایراد دارد؟

من: بله هنوز ایراد کوچکی دارد. وقت نیست، پس خودم آن را اصلاح می‌کنم.

$$\ldots$$
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2<\sqrt{15}^2 \Rightarrow$$
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-\sqrt{15}^2<0 \Rightarrow$$
$$((\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{15})\times((\sqrt{6}+\sqrt{2})-\sqrt{15})<0 \quad \text{i}$$
$$((\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{15})>0 \quad \text{می‌دانیم} \quad \text{ii}$$
$$\text{i,ii} \Rightarrow \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{15}<0 \Rightarrow$$
$$\sqrt{6}+\sqrt{2}<\sqrt{15}$$

پ

بعضی از شما در استدلال پ یک‌باره از $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2<\sqrt{15}^2$ نتیجه گرفته بودند که $(\sqrt{6}+\sqrt{2})<\sqrt{15}$ است. من این موضوع را به دقت و به کمک چیزهایی که همه می‌دانستیم، ثابت کردم.

سعید: پس در حقیقت از $a^2<b^2$ می‌توان نتیجه گرفت که $a<b$ است و ما بدون اثبات از آن استفاده کرده بودیم و شما آن را اثبات کردید.

من: نه.

پس از یک دقیقه همهمه، محمدصدرا نوشته‌هایش را رها کرد و گفت: «از $(-3)^2<(-4)^2$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $-3<-4$ است. ما همگی با بی‌دقتی مثل سعید حکم کرده بودیم، ولی اگر با همان روشی که شما اثبات کردید از $(-3)^2<(-4)^2$ شروع کنیم، متوجه می‌شویم که رسیدن به $-3<-4$ شدنی نیست و کار گره می‌خورد. در واقع گاهی از $a^2<b^2$ می‌توان $a<b$ را نتیجه گرفت و گاهی نمی‌توان.»

من: وقتمان کم است. اگر خودتان کارهایی را که محمدصدرا گفت، پیگیری کنید، متوجه خواهید شد. اما در این وقت کم می‌خواهم ببینم اشکال دیگر استدلال الف را پیدا می‌کنید یا نه. به حرف‌های سعید خوب فکر کنید. دو دقیقه وقت دارید.

خود سعید پس از دو دقیقه گفت: «استدلال الف نیز مشکل مشابهی دارد. از $a<b$ نتیجه گرفته شده است $a^2<b^2$ که این هم ممکن است گاهی درست نباشد. مثلاً $-5<-2$ است، ولی $(-5)^2<(-2)^2$ درست نیست. اگر چه از $(\sqrt{6}+\sqrt{2})<\sqrt{15}$ می‌توان $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2<\sqrt{15}^2$ را نتیجه گرفت.»

سعید به درخواست من پای تخته استدلال خود برای این بخش را چنین نوشت:

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})<\sqrt{15} \Rightarrow$$
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\sqrt{15}<0 \quad \text{i}$$
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{15}>0 \quad \text{می‌دانیم} \quad \text{ii}$$
$$\text{i,ii} \Rightarrow ((\sqrt{6}+\sqrt{2})-\sqrt{15})((\sqrt{6}+\sqrt{2})-\sqrt{15})<0 \Rightarrow$$
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-\sqrt{15}^2<0 \Rightarrow$$
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2<\sqrt{15}^2$$